ETSI de CAMINOS, C. Y P. DE MADRID — **Examen Final Ordinario**

Segundo Curso – MÉTODOS - Matemáticas — 29 de junio de 2011

Alumno________________________________ nº matrícula: ☐☐☐☐☐

NORMAS DEL EXAMEN: 1) Cada ejercicio debe resolverse *en la hoja del enunciado*: no se admiten hojas adicionales. 2) Debe escribirse con tinta azul o negra: no se admite escritura a lápiz ni en color rojo. 3) El DNI del alumno debe estar a la vista sobre la mesa. 4) No está permitido levantarse ni hablar hasta que se hayan recogido los últimos ejercicios y se salga del aula de examen. 5) Se puede disponer sólo del Formulario oficial de la asignatura (sin informaciones adicionales de ningún tipo) y del papel en blanco para uso como borrador.

Ejercicio nº 3 .- (A) Dada una curva, γ : $\{x = 0\ ,\ y = u\ ,\ z = \operatorname{sen} u\ ;\ 0 < u < \pi\}$, calcular: (i) su triedro de Frenet, $\{\underline{T}(u), \underline{N}(u), \underline{B}(u)\}$, en la base cartesiana; (ii) su curvatura, $\kappa(u)$; (iii) su torsión, $\tau = \tau(u)$. [3 puntos]

(B) Se considera la superficie tubular de radio 1 determinada por γ, es decir, la superficie S de ecuación vectorial $\{\underline{r}(u, v) = \underline{R}(u) + \cos v\ \underline{N}(u) + \operatorname{sen} v\ \underline{B}(u);\ 0 < u < \pi,\ 0 \le v < 2\pi\}$, donde $\underline{R}(u)$ es el vector de posición de γ. Se pide:

1) Expresar la base de superficie $\{\underline{g}_u, \underline{g}_v\}$ en el triedro de Frenet de γ. [3 puntos]

2) Calcular la primera forma fundamental de S. [1 punto]

3) Discutir si alguna las líneas $\gamma_1 : S \cap \{y = \frac{\pi}{2}\}$, $\gamma_2 : S \cap \{x = 1\}$, $\gamma_3 : S \cap \{z = 0\}$ es línea asintótica o geodésica de S, razonando la respuesta. [3 puntos]

Solución: (ver Práctica 3, ejercicio nº 29)

(A) Se designa por $\underline{R}(u) = u\underline{\mathrm{j}} + \operatorname{sen} u\ \underline{\mathrm{k}}$ el vector posición de los puntos de γ (ver parte (B) del enunciado) y se tiene:

$$\underline{R}'(u) = \underline{\mathrm{j}} + \cos u\ \underline{\mathrm{k}}\ ;\ |\underline{R}'(u)| = \sqrt{1+\cos^2 u} = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}u}\ ;$$

Así:
$$\underline{T}(u) = \frac{\underline{R}'(u)}{|\underline{R}'(u)|} = \frac{\underline{\mathrm{j}} + \cos u\underline{\mathrm{k}}}{\sqrt{1+\cos^2 u}}$$

Puesto que la curva es plana, al permanecer en el plano coordenado $\{x = 0\}$ o YZ, su plano osculador, y puesto que dobla hacia abajo del avance (o sea, hacia el semieje Z^-) , se tiene:

$\underline{B}(u) = -\ \underline{\mathrm{i}}$ (= vector constante, característico del plano osculador, orientado positivamente con $\underline{T}$ y $\underline{N}$);

$$\underline{N}(u) = -\ \underline{\mathrm{i}}\times\underline{T}(u) = \frac{\cos u\underline{\mathrm{j}} - \underline{\mathrm{k}}}{\sqrt{1+\cos^2 u}}$$

NOTA: Se puede también calcular $\underline{B}$ como el unitario de $\underline{R}'(u)\times\underline{R}''(u)$ (con más trabajo):

$\underline{R}''(u) = -\operatorname{sen} u\ \underline{\mathrm{k}}$; $\underline{R}'(u)\times\underline{R}''(u) = -\operatorname{sen} u\ \underline{\mathrm{i}}$; $|\underline{R}'(u)\times\underline{R}''(u)| = |\operatorname{sen} u| = \operatorname{sen} u$ (pues $\operatorname{sen} u > 0$ en $]0\ ,\pi[$) $\Rightarrow \underline{B}(u) = -\underline{\mathrm{i}}$

Y resulta, también así:
$$\underline{N}(u) = -\ \underline{\mathrm{i}}\times\underline{T}(u) = \frac{\cos u\underline{\mathrm{j}} - \underline{\mathrm{k}}}{\sqrt{1+\cos^2 u}}\ ;$$

(A) (ii) se tiene:
$$\kappa(u) = \frac{|\underline{R}'(u)\times\underline{R}''(u)|}{|\underline{R}'(u)|^3} = \frac{\operatorname{sen} u}{\left(1+\cos^2 u\right)^{3/2}}$$

(A) (iii) $\qquad \tau(u) \equiv 0$, pues γ es plana #.

(B) 1) Se tiene la ecuación vectorial de S

$$\underline{r}(u, v) = \underline{R}(u) + \cos v\ \underline{N}(u) + \operatorname{sen} v\ \underline{B}(u) \qquad \text{(Ec. 1)}$$

y se deriva aplicando las fórmulas de Frenet para γ, con parámetro arbitrario, u, y factor de escala

$$\tfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}u} = \sqrt{1+\cos^2 u}$$

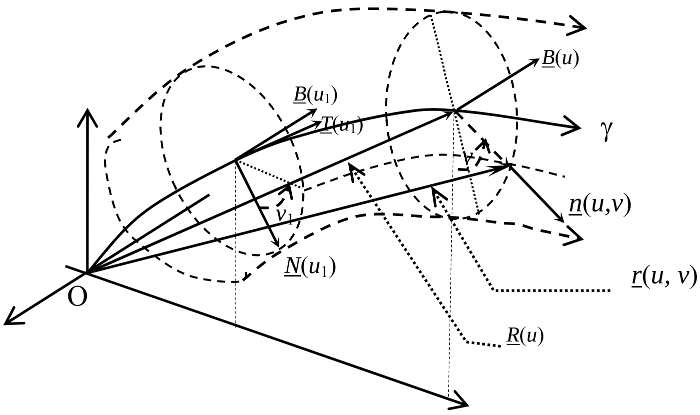
Resulta:
$$\underline{g}_u = \frac{\partial\underline{r}(u,v)}{\partial u} = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}u}\underline{T} + \cos v\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}u}(-\kappa\underline{T} + \tau\underline{B}) - \operatorname{sen} v\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}u}\tau\underline{N} = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}u}(1-\kappa\cos v)\underline{T}$$
$$\underline{g}_v = -\operatorname{sen} v\,\underline{N} + \cos v\,\underline{B} \qquad \#.$$

2) La *IFF* de S es la forma cuadrática del tensor métrico de superficie, cuya matriz cova-cova en la base de superficie es $G(u,v) = [g_{\alpha\beta}(u,v)]$, con

$$g_{\alpha\beta}(u,v) = \underline{g}_\alpha(u,v)\cdot\underline{g}_\beta(u,v) \Rightarrow G(u,v) = \begin{bmatrix} (1+\cos^2 u)(1-\kappa\cos v)^2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

y se puede escribir: $\quad IFF(\mathrm{d}u, \mathrm{d}v) \equiv (\mathrm{d}s)^2 = (1+\cos^2 u)(1-\kappa\cos v)^2(\mathrm{d}u)^2 + (\mathrm{d}v)^2$ #.

3) La interpretación geométrica de la superficie tubular S se sugiere en la figura adjunta.



La normal a S en cada punto (u, v) es el unitario de

$$\underline{g}_u \times \underline{g}_v = -\tfrac{ds}{du}\operatorname{sen} v(1-\kappa\cos v)\underline{B} - \tfrac{ds}{du}\cos v(1-\kappa\cos v)\underline{N}\,,$$

o sea: $$\underline{n}(u, v) = -\cos v\,\underline{N}(u) - \operatorname{sen} v\,\underline{B}(u) \qquad \text{(Ec. 2)}$$

Se observa así que *la normal a S, $\underline{n}(u, v)$, es normal principal de la circunferencia generatriz*, puesto que ésta viene descrita por los términos $\cos v\ \underline{N}(u) + \operatorname{sen} v\ \underline{B}(u)$

de la (Ec. 1), coincidiendo con $-\underline{n}(u, v)$, según la (Ec.2). De este modo, todas las circunferencias generatrices son *líneas geodésicas* de S (su curvatura principal es normal a S). Se tiene entonces:

- $\gamma_1 : S \cap \{y = \frac{\pi}{2}\}$ es la línea coordenada $L_{u=\pi/2}$ que corresponde a la circunferencia generatriz:

$$\gamma_1 :\ \underline{r}_1(v) = \underline{r}(\tfrac{\pi}{2}, v) = \underline{R}(\tfrac{\pi}{2}) + \cos v\ \underline{N}(\tfrac{\pi}{2}) + \operatorname{sen} v\ \underline{B}(\tfrac{\pi}{2})$$

por la tanto es <u>*línea geodésica*</u> de S.

- $\gamma_2 : S \cap \{x = 1\}$ es la línea coordenada $v = \dfrac{3\pi}{2}$, que se corresponde con la curva directriz dada $\underline{R}(u)$

trasladada al plano $\{x = 1\}$, pues:

$$\gamma_2 : \underline{r}_2(u) = \underline{r}(u, \tfrac{3\pi}{2}) = \underline{R}(u) - \underline{B}(u) = \underline{R}(u) + \underline{i}$$

El plano osculador de esta curva es el plano $\{x = 1\}$ que la contiene; este plano es tangente a S a lo largo de la curva γ_2, pues $\underline{n}(u, \frac{3\pi}{2}) = -0\ \underline{N}(u) - (-1)\ \underline{B}(u) = -\underline{i}$. Así, γ_2 es <u>*línea asintótica*</u> de S.

- $\gamma_3 : S \cap \{z = 0\}$ está contenida en el plano XY, que es su *plano osculador*; este plano no es normal ni

tampoco tangente a S en todo punto de γ_3. Luego ésta NO es línea geodésica NI línea asintótica de S. #.